Clase 5

Campo eléctrico

Distribuciones contínuas de carga

Ejemplo 7: Se tiene una distribución lineal homogénea de carga λ sobre una circunferencia de radio R. Queremos calcular el campo eléctrico sobre un punto que se encuentra sobre su eje a una distancia h de su centro.

Conviene escoger un sistema de coordenadas con origen en el centro de la circunferencia y eje z en la dirección del eje.

Entonces tendremos que el aro de carga se parametriza en términos $\varphi \in (0, 2\pi)$ como, $\vec{\mathbf{r}}'(\varphi) = Rcos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + Rsen(\varphi)\hat{\mathbf{y}}$ y la posición donde nos interesa calcular el campo es $\vec{\mathbf{r}}(h) = z\hat{\mathbf{z}}$. El elemento de linea al igual que en el ejemplo anterior es $dl' = Rd\varphi$. El campo eléctrico es:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^3} dl' = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{\mathbf{z}} - R(cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}} d\varphi$$

Por consideraciones de simetría o haciendo las integrales es fácil darse cuenta que $E_x = 0 = E_y$. Para la componente z la integral es trivial y encontramos que,

$$E_z(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}}$$

En términos de la carga total $Q = 2\pi\lambda$ de la distribución el resultado es,

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}}$$

A grandes distancias el campo tiende al de una carga puntual.

<u>Elementos de superficie</u>

Una superficie requiere de dos parámetros τ y ν para su parametrización. El elemento de superficie se escribe mas convenientemente en términos de un vector infinitesimal $d\vec{\mathbf{S}}$ perpendicular a la superficie. Éste a su vez se construye en cada punto a partir un vector $\vec{\mathbf{dl}}_\tau = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \tau} d\tau$ tangente a la curva $\nu = constante$ que pasa por el punto y un vector $\vec{\mathbf{dl}}_\nu = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \nu} d\nu$ tangente a la correspondiente curva $\tau = constante$ en la forma

$$d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{dl}}_\tau \times \vec{\mathbf{dl}}_\nu = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \tau} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \nu} d\tau d\nu$$

El elemento de área es entonces

$$dS = \sqrt{d\vec{\mathbf{S}}.d\vec{\mathbf{S}}}.$$

Ejemplo 8: Elemento de área de un disco de un disco

Colocando el disco con su centro en el origen la parametrización está dada por $\vec{\mathbf{r}}'(\rho, \varphi) = \rho cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \rho sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}}$ donde $\rho \in (0, R)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$. Haciendo las derivadas parciales

$$\vec{\mathbf{dl}}_\rho = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \rho} d\rho = (cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}})d\rho$$

$$\vec{\mathbf{dl}}_\phi = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} d\varphi = (-sen(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + cos(\varphi)\hat{\mathbf{y}})d\varphi$$

El elemento de superficie es:

$$d\vec{\mathbf{S}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ cos(\varphi) & sen(\varphi) & 0 \\ -\rho sen(\varphi) & \rho cos(\varphi) & 0 \end{vmatrix} d\varphi d\rho = \rho d\varphi d\rho \hat{\mathbf{z}}$$

Podemos calcular el área del disco notando que $dS = |d\vec{\mathbf{S}}| = \rho d\varphi d\rho$. Como sabemos:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\varphi d\rho = \pi R^2.$$

Ejemplo 9: Cálculo del campo eléctrico de un disco con densidad superficial homogénea de carga σ sobre un punto de su eje.

Colocamos el disco con su centro en el origen y su eje coincidiendo con el eje z. Como en ejemplo anterior la parametrización de los puntos sobre la superficie está dada por $\vec{\mathbf{r}}'(r, \varphi) = rcos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + rsen(\varphi)\hat{\mathbf{y}}$ donde $r \in (0, R)$ y $\varphi \in (0, 2\pi)$. El elemento de superficie es: $dS = rd\varphi dr$. El campo eléctrico en el punto $\vec{\mathbf{r}} = z\hat{\mathbf{z}}$ se calcula como,

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{\mathbf{r}'})}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}|^3} (\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}'}) dS' =$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{z\hat{\mathbf{z}} - r(cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)^3}} \rho d\rho d\varphi$$

Por la simetría del problema nos podemos convencer que las componentes x y y se anulan como resulta también de hacer la integral en φ en la expresión arriba. El campo apunta en la dirección z. Para la componente z la integral en φ da 2π. Queda

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{z}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)^3}} \rho d\rho = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \Big|_0^R \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}) \end{aligned}$$

El cálculo del campo eléctrico de esta configuración se puede también hacer utilizando el resultado calculado para un anillo de carga. Para sto notamos que un disco es la superposición de un continuo de anillos infinitesimales cargados de radios ρ y carga $dq = \sigma 2\pi\rho d\rho$ con ρ variando entre 0 y R. Entonces usando el mismo sistema de coordenadas la componente no nula del campo se calcula como:

$$E_z \quad = \int dE_z = \quad \frac{z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{dq}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)^3}} = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{(\rho^2 + z^2)^3}} d\rho$$

que es la misma integral que acabamos de calcular.